

Spotkanie on-line OWa PTM
Poznajmy się-przypomnijmy się sobie nawzajem
21.10.2020

Od kwazikryształów do biologii ewolucyjnej
i z powrotem
historia osobista

Jacek Miękisz
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Układy wielu oddziałujących obiektów

Relaksacja ferrocieczy w polu magnetycznym

magisterium z fizyki, Politechnika Wrocławska, 1979

Equilibrium states of ferromagnetic abelian lattice systems

doktorat z matematyki, Virginia Tech, 1984

Kwazikryształy

post-doc, University of Texas at Austin, 85-88



David Hilbert 1862 - 1943

23 problemy, 1900 rok

Problem 18 część druga

Czy istnieje wielościan, którym można pokryć przestrzeń
ale TYLKO w sposób nieokresowy?



Hao Wang 1921-1995

Problem Hilberta dla grających w domina

kafelki Wanga ---- kwadraty z kolorowymi bokami

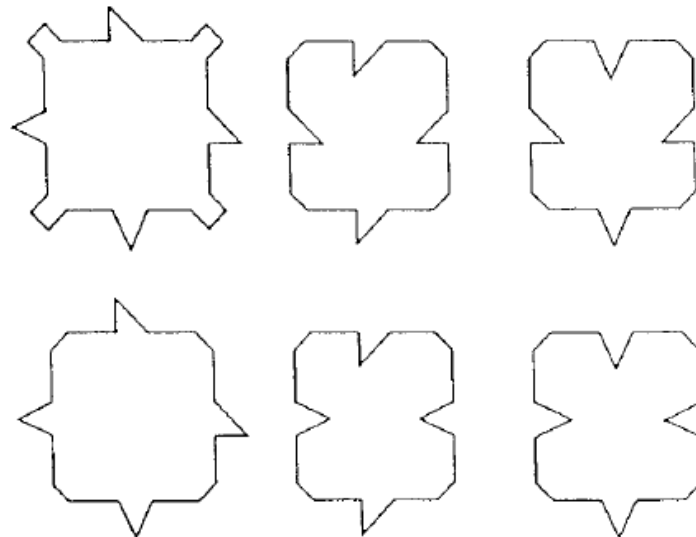
Hipoteza Wanga 1961

Każdy skończony układ kostek domina pokrywający płaszczyznę może pokryć ją także w sposób okresowy



Raphael Robinson 1911 - 1995

6 (56) kafelków, którymi można pokryć płaszczyznę
ale tylko w sposób nieokresowy, 1971

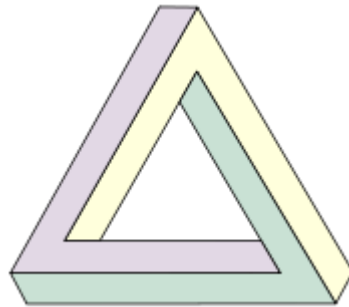




Roger Penrose 1931 -

Nagroda Nobla z Fizyki 2020

W 1954 roku podczas Międzynarodowego Kongresu Matematycznego w Amsterdamie, Penrose był na wystawie M. C. Eschera



Nieвозмоżliwy trójkąt, Lionel Penrose i Roger Penrose, 1958



Ascending and Descending, M. C. Escher, 1960, Wikipedia



Waterfall, M. C. Escher, 1961, Wikipedia

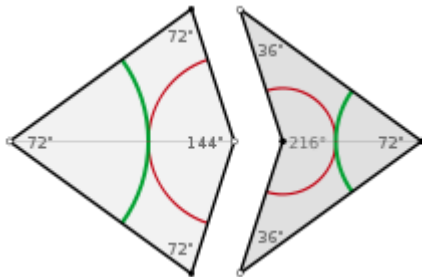


Roger Penrose

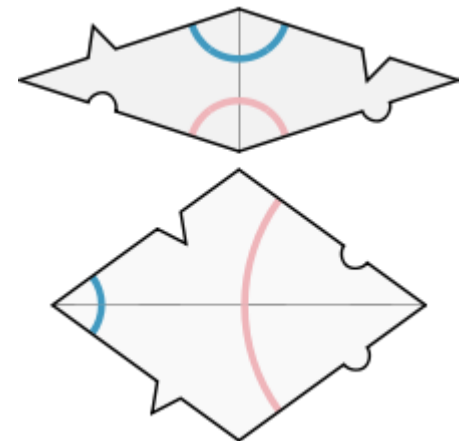
1931 -

Dwie dachówki pokrywające płaszczyznę tylko w sposób nieokresowy, 1974

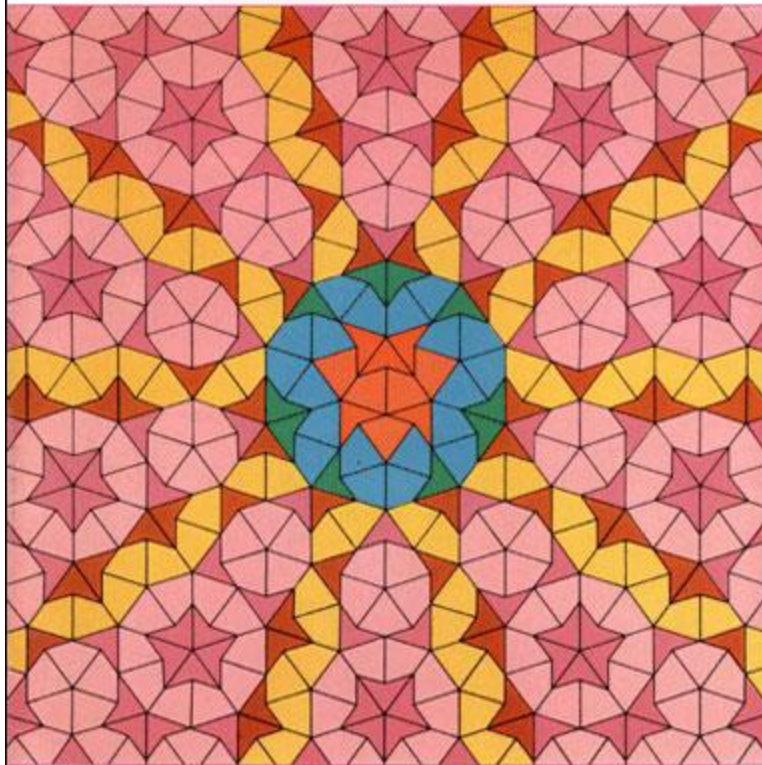
strzała i latawiec



romby



SCIENTIFIC AMERICAN



THEORY OF TILES

\$1.50

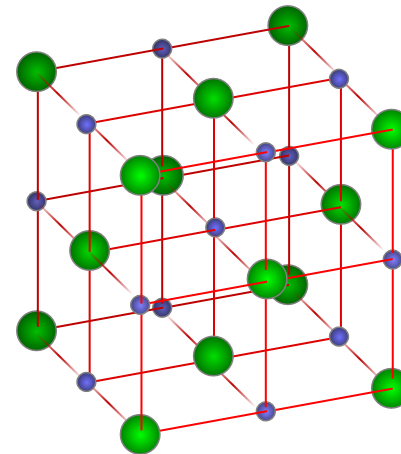
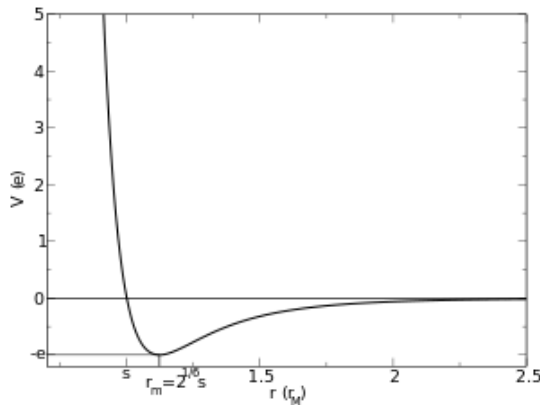
January 1977

© 1976 SCIENTIFIC AMERICAN, INC.

Problem kryształu

Stan równowagowy układu wielu oddziałujących cząstek minimalizuje energię swobodną $F = E - TS$ (lub energię E w temperaturze $T = 0$)

Udowodnić, że minimalizacja energii realistycznych oddziaływań międzycząsteczkowych, na przykład potencjału Lennarda-Jonesa, prowadzi do regularnej okresowej siatki krystalicznej.

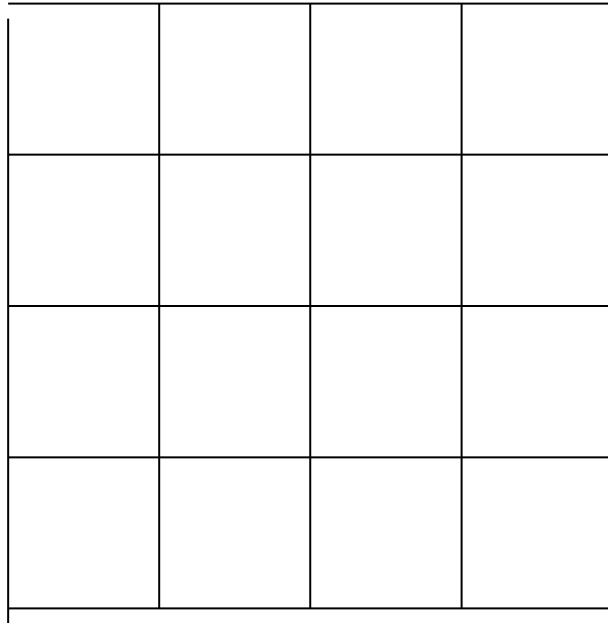


Philip W. Anderson

Basic notions of condensed matter physics, 1984

Benjamin/Cummings Pub. Co.

Szkic „dowodu”, że każde oddziaływanie posiada okresowy stan podstawowy



$$E = E(\text{wewnątrz kwadratów o boku } L) \\ + E(\text{pomiędzy kwadratami}) = E_w + E_p$$

Konfiguracja X_i minimalizuje energię kwadratu i

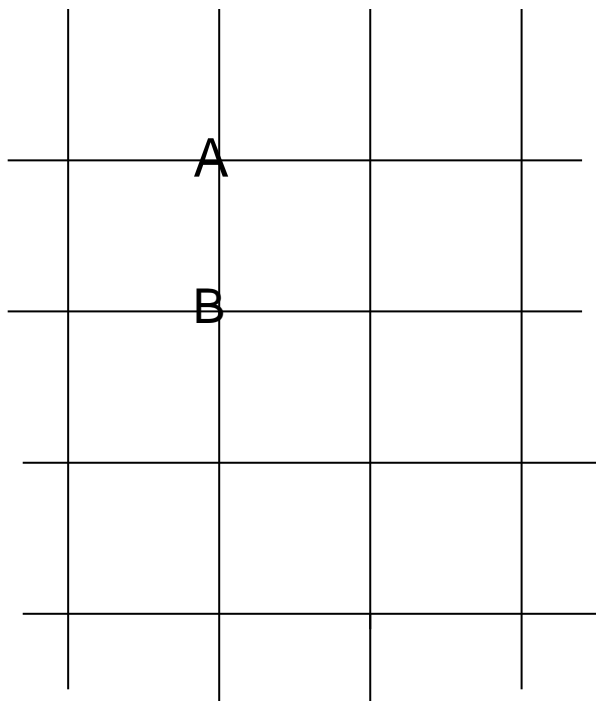
Budujemy X z X_i i jego translacji

X jest okresowym stanem podstawowym

Dlaczego?

Inna konfiguracja być może ma mniejszą energię E_p (rzęd wielkości L)
ale większą energię E_w (rzęd wielkości L^2).

Gaz sieciowy z 56 typami cząstek



dachówki ----- cząstki

oddziaływania:

energia A i B = 0, jeśli A i B pasują do siebie

energia A i B = 1, jeśli A i B nie pasują do siebie

stan podstawowy --- mozaika Robinsona

powyższy model oddziałujących
cząstek nie posiada okresowego
stanu podstawowego

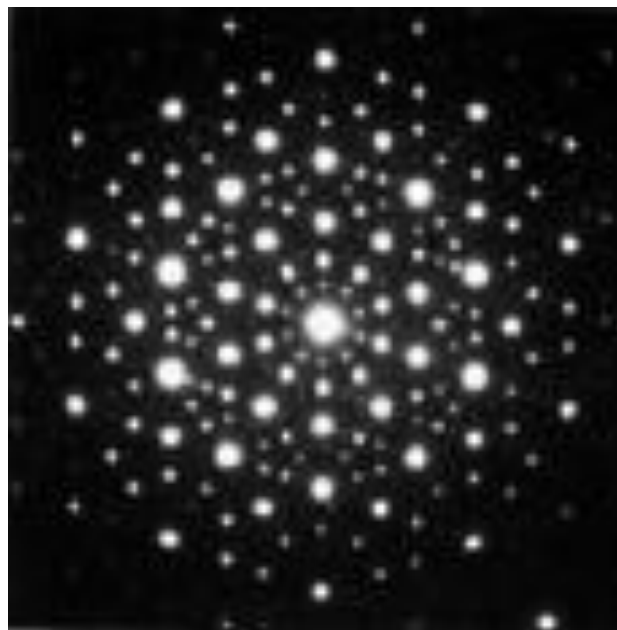


Dan Shechtman 1941 -

Technion Israel Institute of Technology
obecnie także Iowa State University

8 kwietnia 1982 w National Bureau of Standards w Waszyngtonie

Dan Shechtman obserwował
szybko schłodzony stop
aluminium i manganu



Miary Gibbsa

stany równowagi układu fizycznego

$$X \in \Omega_\Lambda = \{1, \dots, n\}^\Lambda, \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}^d, \quad \Lambda \text{ ograniczona}$$

$$\text{Hamiltonian, } H : \Omega_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho_\Lambda(X) = \frac{e^{-\frac{H(X)}{T}}}{Z_\Lambda} \quad \text{miara na } \Omega_\Lambda$$

$$\rho_\Lambda \rightarrow \{\text{miary Gibbsa}\}, \quad \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d \quad \text{miary na } \Omega = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}^d}$$

Problem Otwarty

Skonstruować układ oddziałujących cząstek, dla którego minimalizacja energii swobodnej osiągnana jest przez nieokresowe miary Gibbsa, które w odpowiednio niskich temperaturach przypisują prawdopodobieństwo bliskie jedności nieokresowym stanom podstawowym.

Wynik negatywny ale interesujący

Podwajanie okresu, JM, J. Stat. Phys. 1990

Y - mozaika Robinsona

Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zbiegający do zera ciąg temperatur T_n , taki że jeśli $T \leq T_n$, to $\mu_T^Y(X_i = Y_i) > 1 - \epsilon$, $i \in 2^n \mathbb{Z}^2$

POWRÓT DO PARKU JURAJSKIEGO



ZAGINIONY ŚWIAT

**MICHAEL
CRICHTON**

Biologia w skali makro

teoria gier ewolucyjnych, układy oddziaływających graczy

Biologia w skali mikro

układy oddziaływających molekuł

Gra

1) Zbiór graczy $n=2$, dwóch myśliwych

$$I = \{1, \dots, n\}$$

2) Zbiór strategii $S = \{\text{polować na jelenia, gonić zająca}\}$

$$S = \{1, \dots, m\}$$

3) Wyплаты

$$u_i: S^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$i=1, \dots, n$

jeleń - 10

zając - 3

	J	Z	J	Z
J	5	0	5	3
Z	3	3	0	3

Jak grać?

Równowaga Nasha

Przypisanie graczom strategii, tak iż żadnemu z graczy, przy ustalonych strategiach wszystkich innych graczy, nie opłaca się zmienić swojej strategii



	J	Z	J	Z
J	5	0	5	3
Z	3	3	0	3

równowagi Nasha: (J,J), (Z,Z)

Dylemat Więźnia

Kooperowali: Jakub Łącki, Michał Matuszak, Bartosz Sułkowski

Gracze: dwóch podejrzanych

Strategie: Kooperacja, Zdrada

Wyплаты: obniżenie wyroku

	Kooperacja	Zdrada
Kooperacja	3	0
Zdrada	5	1

Jedyna równowaga Nasha = (Zdrada,Zdrada)

Gry na grafach

W wierzchołkach grafu umieszczamy graczy.

Ich wypłata jest sumą wypłat z gier z sąsiadami.

Grafy Poissona

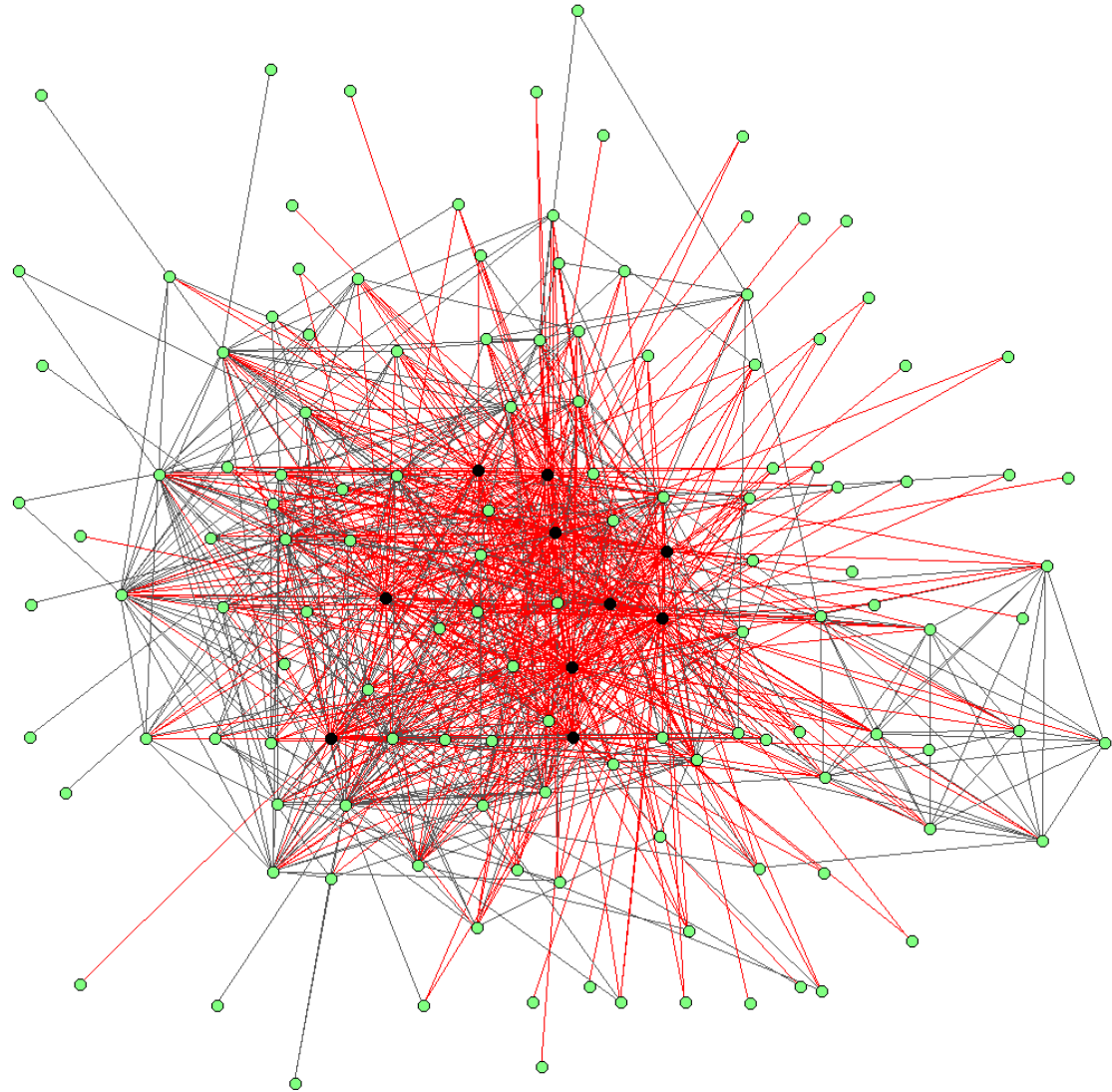
Każdą parę wierzchołków łączymy krawędzią z prawdopodobieństwem ε

Rozkład stopni wierzchołków jest rozkładem Poissona

Bezskalowe grafy typu Barabasi-Alberty

Reguła preferencyjnego linkowania

Rozkład stopni wierzchołków $\sim k^{-\lambda}$



	K	Z
K	1	0
Z	T	0

	K	Z
K	$1-\gamma$	$-\gamma$
Z	$T-\gamma$	$-\gamma$

γ - koszt połączenia

Dynamika imitacji najlepszej strategii z otoczenia

Losowo wybrany gracz imituje z dużym prawdopodobieństwem $(1 - \epsilon)$ strategię sąsiada z największą wypłatą w poprzedniej rundzie

Ergodyczny łańcuch Markowa z jedynym stanem stacjonarnym.

Średni poziom współpracy w stanie stacjonarnym

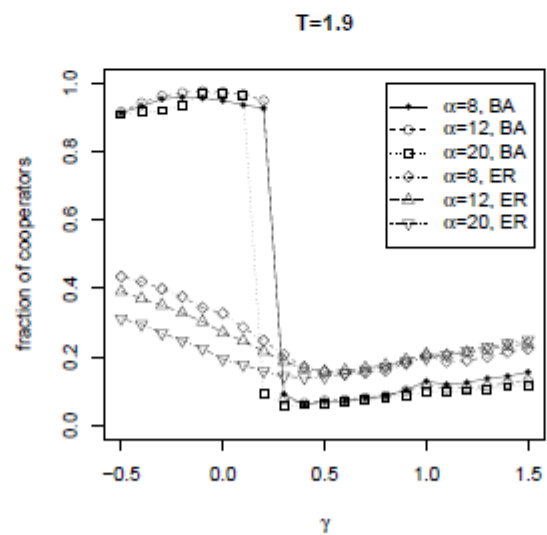
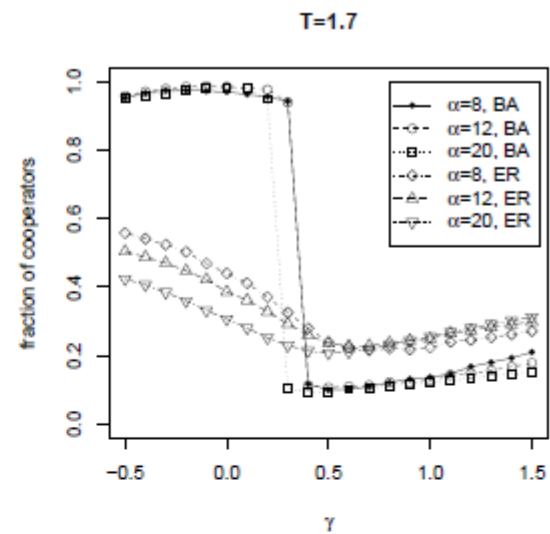
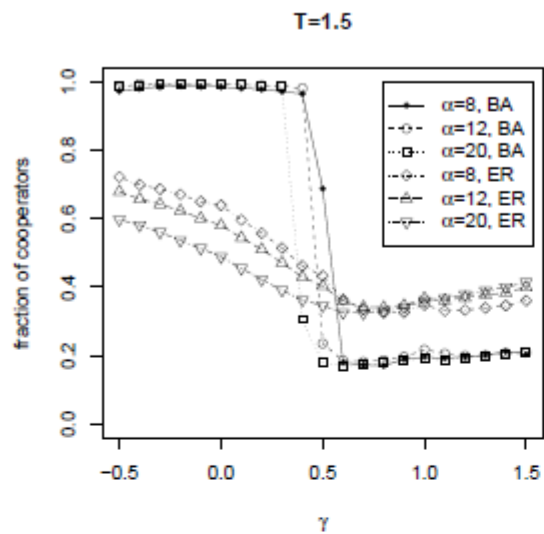


Figure 1: Fractions of cooperators depending on the cost of maintaining a link.

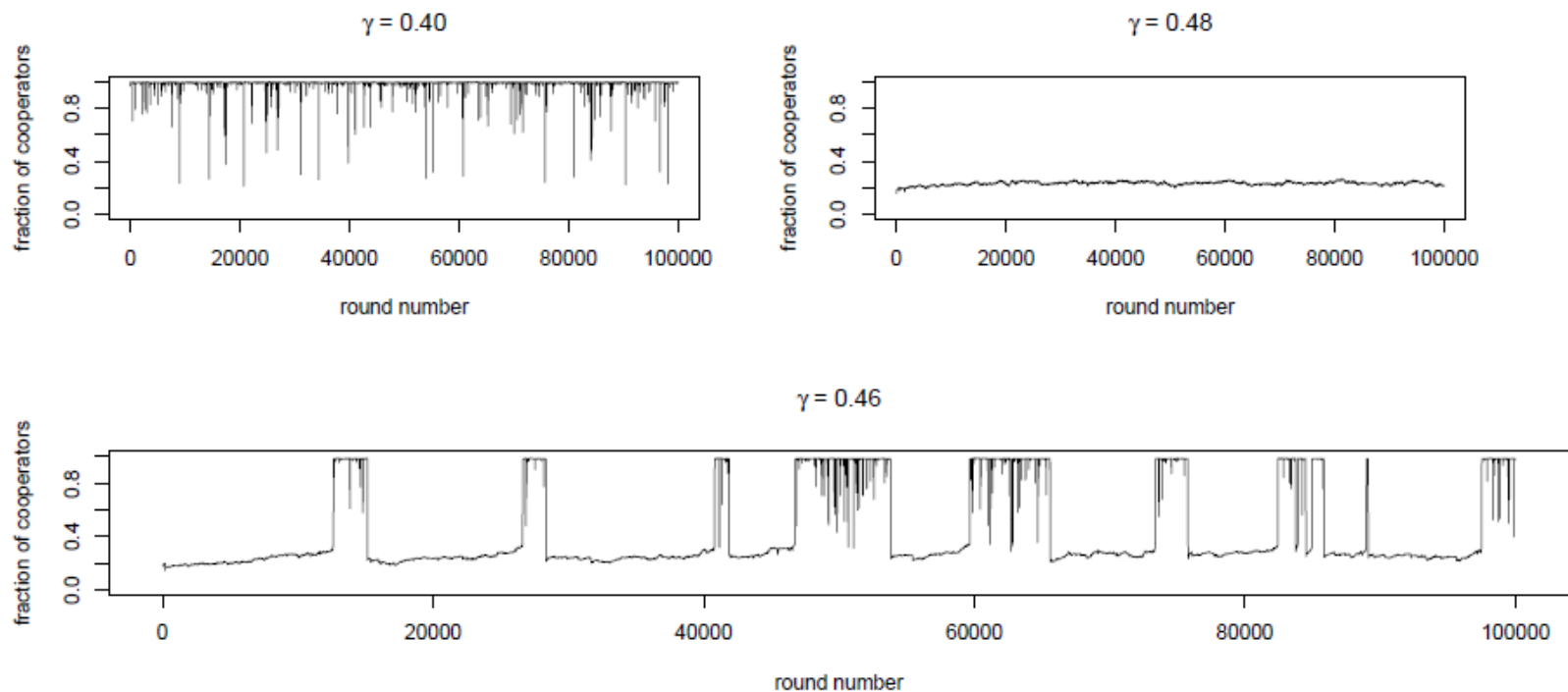


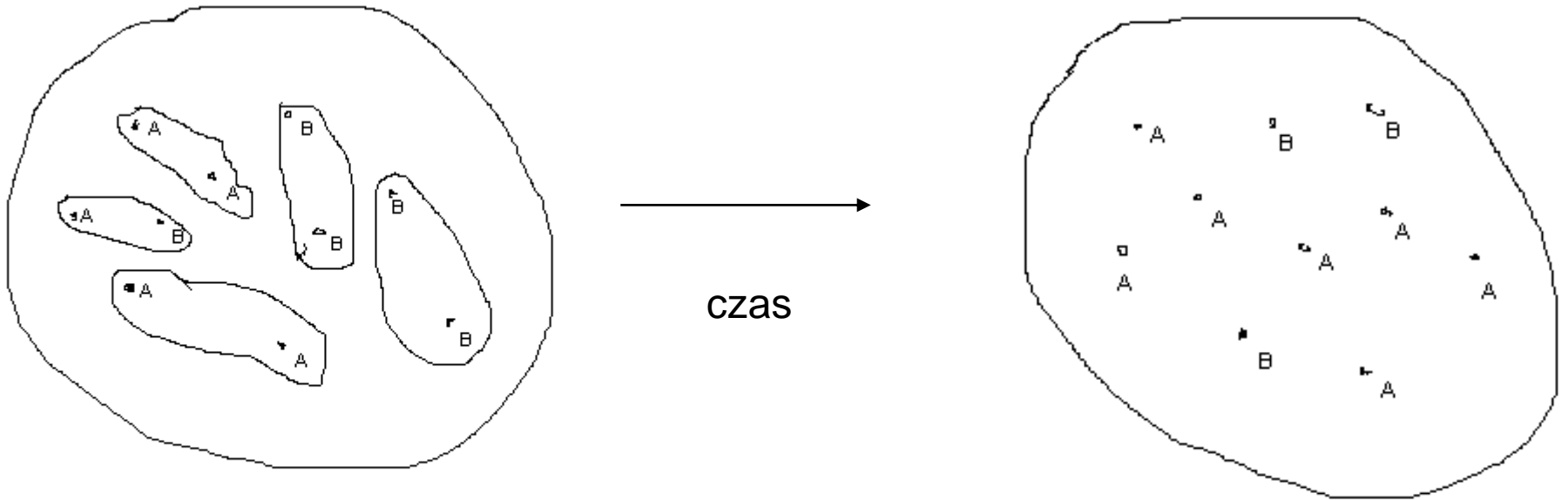
Figure 3: Fractions of cooperators after each round in sample simulations for different values of γ . Barabási-Albert network, $T = 1.5$, average connectivity equal to 12.

Problem Otwarty

Udowodnij istnienie przejścia fazowego.
Jakiego rodzaju jest to przejście fazowe?

Opóźnienia czasowe

Przykład: dynamika populacyjna gier ewolucyjnych



A i B są dwoma możliwymi zachowaniami,
fenotypami albo strategiami

Dynamika replikatorowa

	A	B
A	a	b
B	c	d

$p_A(t)$ – liczba graczy A w czasie t

$p_B(t)$ – liczba graczy B w czasie t

$$x(t) = \frac{p_A(t)}{p_A(t) + p_B(t)}$$

$$U_A = ax + b(1-x)$$

$$U_B = cx + d(1-x)$$

$$U_{av} = xU_A + (1-x)U_B$$

$$p_A(t+\varepsilon) = (1-\varepsilon)p_A(t) + \varepsilon p_A(t)U_A(t)$$

$$p_A(t+\varepsilon) = (1-\varepsilon)p_A(t) + \varepsilon p_A(t)U_A(t)$$

$$p_B(t+\varepsilon) = (1-\varepsilon)p_B(t) + \varepsilon p_B(t)U_B(t)$$

$$p(t+\varepsilon) = (1-\varepsilon)p(t) + \varepsilon p(t)U_{av}(t)$$

$$x(t + \varepsilon) - x(t) = \varepsilon \frac{x(t) [U_A(t) - U_{av}(t)]}{1 - \varepsilon + \varepsilon U_{av}(t)}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(U_A - U_{av}) = x(1 - x)(U_A - U_B)$$

Opóźnienia czasowe zależne od strategii

wspólna praca z Markiem Bodnarem

$$p_i(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)p_i(t) + \varepsilon p_i(t - \tau_i)U_i(t - \tau_i); \quad i = A, B,$$

$$p(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)p(t) + \varepsilon \left(p_A(t - \tau_A)U_A(t - \tau_A) + p_B(t - \tau_B)U_B(t - \tau_B) \right)$$

Dynamika replikatorowa

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(t - \tau_A)p(t - \tau_A)U_A(t - \tau_A)(1 - x(t)) - (1 - x(t - \tau_B))p(t - \tau_B)U_B(t - \tau_B)x(t)}{p(t)}$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = -p(t) + \left(p_A(t - \tau_A)U_A(t - \tau_A) + p_B(t - \tau_B)U_B(t - \tau_B) \right)$$

Warunki początkowe

$$x(t) = \varphi_x(t), \quad p(t) = \varphi_p(t), \quad \text{for } t \in [-\tau_M, 0]$$

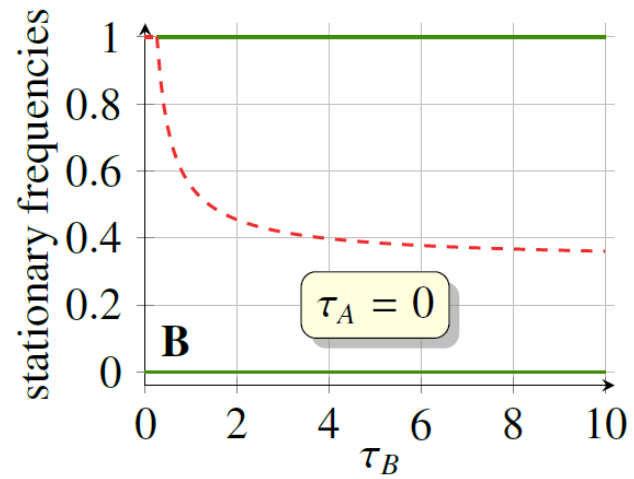
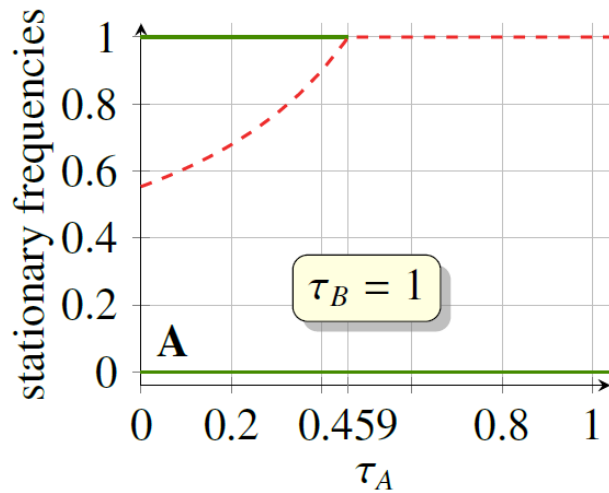
Stany stacjonarne

$$x(t) = \bar{x} \text{ for all } t \geq 0 \quad p(t) = p_0 \exp(\lambda t)$$

$$F(\bar{x}) = 0$$

$$F(x) = \frac{1}{\tau_A - \tau_B} \ln \left(\frac{ax + b(1-x)}{cx + d(1-x)} \right) + 1 - \frac{\left(cx + d(1-x) \right)^{\tau_A/(\tau_A - \tau_B)}}{\left(ax + b(1-x) \right)^{\tau_B/(\tau_A - \tau_B)}}$$

Dylemat Więźnia



Kwazikrystaliczne układy 1- wymiarowe

Ciągi Fibonacciego

podstawienia

$0 \rightarrow 01$

$1 \rightarrow 0$

0	1
01	2
010	3
01001	5
01001010	8
0100101001001	13

Niech X będzie ciągiem Fibonacciego, $X \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$

$$F = \text{domknięcie}\{T_a X, a \in \mathbb{Z}\}$$

(F, T, μ_F) jest ergodycznym układem dynamicznym.

Alternatywna konstrukcja ciągów Fibonacciego

Let $0 \leq \phi \leq 2\pi$ and let T_γ be a rotation by $2\pi\gamma$ on a unit circle.

If $T_\gamma^n(\phi) \in [0, 2\pi\gamma) \bmod 2\pi$ then let $a(n) = 0$, otherwise $a(n) = 1$.

Ciągi Fibonacciego są jednoznacznie scharakteryzowane poprzez nieobecność par jedynek o zakazanych odległościach.

Hamiltonian z oddziaływaniami dwucząstkowymi i układem Sturma jako jedynym stanem podstawowym

Aernout van Enter, Henna Koivusalo, M, J. Stat. Phys, 2020

Stabilność struktur nieokresowych

Generyczność

Dla zbioru Baire'a drugiej kategorii oddziaływań w odpowiedniej przestrzeni Banacha, jedyna miara stanu podstawowego jest nieokresowa, niemieszająca, albo trywialna - skoncentrowana na jednej konfiguracji.

JM, 1988; JM i Charles Radin, 1989

Otwarty problem

Czy stan podstawowy Sturma jest stabilny ze względu na skończone zaburzenia Hamiltonianu?

częściowe wyniki, praca magisterska Damiana Głodkowskiego

Grant NCN OPUS

**Time delays
in stochastic biological models**

Grant NCN HARMONIA

Matematyczne modele kwazikryształów