Kilka uwag o klasycznej pracy Aronszajna, Krzywickiego i Szarskiego oraz jej współczesnych zastosowaniach

Sławomir Dinew [1]

[1] Instytut Matematyki UJ

31.10.2021

Nie wszystek umrę...

Aronszajn, N.; Krzywicki, A.; Szarski, J.
A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds.
Ark. Mat. 4 (1962), 417–453 (1962).

Aronszajn, N.; Krzywicki, A.; Szarski, J.
A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds.
Ark. Mat. 4 (1962), 417–453 (1962).

80 cytowań wg MathScinet
204 cytowań wg Google Scholar

PYTANIE

Niech $u \in C^\infty$ (u może być funkcją, układem funkcji, polem wektorowym ...). Jeżeli u ma zero nieskończonego rzędu w danym punkcie to przy jakich dodatkowych warunkach $u \equiv 0$?

Twierdzenie (AKS)

Niech M^n będzie rzeczywistą rozmaitością Riemannowską z Lipschitzowską metryką a. Niech u będzie p-formą różniczkową z zerem nieskończonego rzędu w pewnym punkcie $x_0 \in M^n$. Jeżeli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset M^n$ istnieje stała C_K taka, że

$$\forall x \in K \ \ ||du||_a^2(x) + ||\delta u||_a^2(x) \leq C_K ||u||_a^2(x)$$

to $u \equiv 0$.

u-lokalnie postaci

$$u(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} u_I dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$du - \text{różniczka zewnętrzna } u$$

$$\delta u = (-1)^{n(p+1)+1} * d * u - \text{operator sprzężony do } d$$

($*$- to operator $*$-Hodge'a)

u-lokalnie postaci

$$u(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} u_I dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

$$du - \text{różniczka zewnętrzna } u$$

$$\delta u = (-1)^{n(p+1)+1} * d * u - \text{operator sprzężony do } d$$

($*$- to operator $*$-Hodge'a)

$$\int_{M^n} < u, v >_a dV_a = \int_{M^n} u \wedge *v$$

Gdy $M = \mathbb{R}^3$, $u = X^1 dx_1 + X^2 dx_2 + X^3 dx_3$

Gdy $M = \mathbb{R}^3$, $u = X^1 dx_1 + X^2 dx_2 + X^3 dx_3$ to

$$du = (\frac{\partial X^3}{\partial x_2} - \frac{\partial X^2}{\partial x_3})dx_2 \wedge dx_3 + (\frac{\partial X^1}{\partial x_3} - \frac{\partial X^3}{\partial x_1})dx_3 \wedge dx_1$$

$$+(\frac{\partial X^2}{\partial x_1} - \frac{\partial X^1}{\partial x_2})dx_1 \wedge dx_2 =: Curl(X).$$

Gdy $M = \mathbb{R}^3$, $u = X^1 dx_1 + X^2 dx_2 + X^3 dx_3$ to

$$du = \left(\frac{\partial X^3}{\partial x_2} - \frac{\partial X^2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial X^1}{\partial x_3} - \frac{\partial X^3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+\left(\frac{\partial X^2}{\partial x_1} - \frac{\partial X^1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 =: Curl(X).$$

Z kolei

$$-\delta u = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x_1} + \frac{\partial X^2}{\partial x_2} + \frac{\partial X^3}{\partial x_3}\right) =: Div(X).$$

TWIERDZENIE

Dla dowolnej p-formy u takiej, że

1. $u \in W^{1,2}$;

TWIERDZENIE

Dla dowolnej p-formy u takiej, że

1. $u \in W^{1,2}$;
2. $\forall \alpha > 0 \int_{\{||x|| \leq r\}} ||u||^2 = o(r^\alpha)$;

Twierdzenie

Dla dowolnej p-formy u takiej, że

1. $u \in W^{1,2}$;
2. $\forall \alpha > 0 \int_{\{||x|| \leq r\}} ||u||^2 = o(r^{\alpha})$;
3. *u ma nośnik zwarty zawarty w* $\{R(x) < s\}$

Twierdzenie

Dla dowolnej p-formy u takiej, że

1. $u \in W^{1,2}$;
2. $\forall \alpha > 0 \int_{\{||x|| \leq r\}} ||u||^2 = o(r^\alpha)$;
3. *u ma nośnik zwarty zawarty w* $\{R(x) < s\}$

zachodzi

$$\forall \alpha > 0$$

$$s^2 \int_{\{R(x)<s\}} R^{-2\alpha}(||du||^2_{\tilde{a}} + ||\delta u||^2_{\tilde{a}}) \geq \int_{\{R(x)<s\}} R^{-2\alpha}||u||^2_{\tilde{a}}.$$

- Oszacowania dla zbioru nodalnego $\{u = 0\}$, krytycznego $\{\nabla u = 0\}$ oraz osobliwego $\{u = \nabla u = 0\}$ dla rozwiązań równań typu

$$L(u) = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u) + b^k(x)\partial_k u + c(x)u = 0$$

oraz niektórych równań nieliniowych.
(Naber-Valtorta, Sire..)

- Oszacowania dla zbioru nodalnego $\{u = 0\}$, krytycznego $\{\nabla u = 0\}$ oraz osobliwego $\{u = \nabla u = 0\}$ dla rozwiązań równań typu

$$L(u) = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u) + b^k(x)\partial_k u + c(x)u = 0$$

  oraz niektórych równań nieliniowych.
  (Naber-Valtorta, Sire..)

- Formy harmoniczne na rozmaitości (formy ψ takie, że $d\delta\psi + \delta d\psi = 0$) są albo zerowe albo $\psi \neq 0$ na gęstym podzbiorze rozmaitości. Zastosowania w geometrii różniczkowej
  (LeBrun ..)

Dziękuję za uwagę!